МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ

«ДОНСКОЙ ТЕХНИКУМ КУЛИНАРНОГО ИСКУССТВА И БИЗНЕСА»

МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА УРОКА ОТКРЫТОГО УРОКА

по дисциплине ОУД.07 Математика

Профессия 43.01.09 ПОВАР, КОНДИТЕР

Тема: «Физический смысл производной в профессиональных задачах»

Разработчик: Косенко Л.В. – преподаватель ГБПОУ РО «ДонТКИиБ»

Ростов-на-Дону
2025

Методическая разработка урока по математике на тему «Физический смысл производной в профессиональных задачах» предназначена для обучающихся по профессии 43.01.09 Повар, кондитер.

Данный урок показывает, как с помощью производной можно решать задачи из различных отраслей науки и техники, исследовать реальные процессы, происходящие в нашей жизни.

Методика проведения урока основана на применении комплекса информационно-коммуникационных, личностно-ориентированных, интерактивных, здоровье сберегающих технологий и технологий проблемного обучения; современных педагогических приемов; игровых, проблемно-поисковых методов; коллективных форм обучения, которые повышают мотивацию обучающихся к освоению трудовых навыков и являются важными факторами становления их профессиональной компетентности.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Урок по теме «Физический смысл производной в профессиональных задачах» входит в программу дисциплины ОУД.07 «Математика» по профессии 43.01.09 Повар, кондитер. Данный урок предназначен для формирования у обучающихся элементов функциональной грамотности на примерах применения производной функции для решения профессиональных задач в смежных науках.

Методическая разработка урока представляет собой урок-практикум с активной самостоятельной работой обучающихся. В ходе урока обучающиеся демонстрируют свои междисциплинарные знания, умения, общие и профессиональные компетенции, выполняя практические задания, а также демонстрируют небольшие исследовательские работы.

Данное занятие рассматривается в разделе курса алгебры «Производная» и является занятием по теме «Вторая производная, ее геометрический и физический смысл». Эта тема помогает дальнейшему пополнению и углублению знаний в области математического анализа, побудить студентов к активному освоению знаний, развитию кругозора; логического мышления и речи; умения проводить систематизацию.

В ходе занятия формируется и совершенствуется математический язык (словесный, символический); качества личности, необходимые для жизни в современном мире (ясность, точность мысли, интуиция); отношение к математике как к части общечеловеческой культуры; российскую гражданскую идентичность, патриотизм, уважение к своему народу, чувства ответственности перед Родиной, гордости за свой край, свою Родину, прошлое и настоящее многонационального народа России; основы саморазвития и самовоспитания в соответствии с общечеловеческими ценностями и идеалами гражданского общества; готовность и способность к самостоятельной, творческой и ответственной деятельности.

На занятии ведется повторение определения первой и второй производной, физический и геометрический смысл, формул, применяемых для вычислений, с опорой на ранее изученный материал производная сложной функции, обратной функции, физический смысл первой производной; при решении показывается связь между данными темами, а также связь темы с другими дисциплинами (физикой, геометрией, материаловедением (химия и биология), экономикой) предусматривается связь с автомобильной тематикой, а также с внешним миром. Последнее является важным звеном в сознательном восприятии учебного материала. Для обеспечения оптимального взаимодействия между преподавателем и студентами на занятии предусмотрены: организация проблемного диалога; использование «готовых» знаний; компьютерная презентация; практическая работа; работа в группах.

Для поддержания интереса и устойчивой концентрации внимания предусмотрена смена видов деятельности: фронтальная работа – учебный диалог; индивидуальная работа – работа в паре или группе; компьютерная презентация – знакомство с новым материалом и новыми понятиями; работа в группах – решение задач; компьютерная презентация – связь с реальным миром.

Контроль над деятельностью студентов в ходе занятия осуществляется со стороны преподавателя, предусмотрены самооценивание и взаимооценивание.

ПЛАН-КОНСПЕКТ УРОКА

Преподаватель: Косенко Л.В.

Тема урока: «Физический смысл производной в профессиональных задачах»

Категория обучающихся: 1-й курс, группа ПК-101

Профессия: 43.01.09 Повар, кондитер.

Цели урока:

1. Образовательная: обобщить, систематизировать и закрепить теоретические знания теме «Геометрический и физический смысл производной», подчеркнуть роль и практическое значение производной при решении задач по математике и физике.
2. Развивающая: развивать навыки самоконтроля, логическое мышление, пространственное восприятие, познавательный интерес, математически грамотную речь, использовать межпредметные связи, осуществить перенос знаний с одного учебного предмета на другой, прививать любовь и бережное отношение к природе;
3. Воспитательная: совершенствовать навыки самостоятельной работы, воспитывать внимание, создать у студентов необходимую базу для выбора нужного подхода к решению математических и физических задач.

Задачи урока:

1. Способствовать развитию логического мышления, внимания, математической интуиции, умению анализировать, систематизировать, интерпретировать полученные результаты
2. Применять знания в нестандартных ситуациях
3. Способствовать развитию и пониманию у обучающихся межпредметных связей алгебры, как науки.

Тип урока: урок применения и совершенствования знаний.

Вид урока:
Урок-исследование (мини проекты обучающихся), комбинированный урок.

Образовательные результаты урока (выписка из ФГОС):

- Знания:

- Обучающиеся понимают понятие производной и её физический смысл, могут объяснить, что представляет собой мгновенная скорость изменения функции.
- Знают основные правила и свойства производной, а также их применение в различных задачах.

- Навыки:

- Развивают навыки решения профессионально ориентированных задач, используя производные.
- Умеют работать с графиками функций, интерпретируя их геометрически через производные.

- Умения:

- Умеют вычислять производные элементарных функций.
- Могут интерпретировать производную как скорость изменения различных параметров и использовать это понимание для решения задач.
- Способны применять производные для анализа зависимостей в технологиях и профессиональной деятельности.

Связь с профессиональным стандартом:

1. *Компетенции в области математики*

Профессиональные стандарты для большинства технических и технологических специальностей требуют наличия крепких математических знаний, включая умение работать с производными.

Понимание физического смысла производной позволяет:

- Оценивать скорость изменения различных процессов (например, скорость роста, изменение температуры, давление и т. д.) в производственных условиях.
- Моделировать и анализировать технологические процессы, что является необходимым умением в рамках многих профессиональных стандартов.

2. *Профессиональные навыки*

В рамках урока, посвященного физическому смыслу производной, обучающиеся могут развивать практические навыки, которые соответствуют требованиям стандартов для их будущей профессии:

- Проектирование и оптимизация процессов: Использование производных для нахождения экстремумов функций, что помогает в оптимизации процессов (например, минимизация затрат и времени).
- Анализ данных и интерпретация результатов: Умение работать с производственными данными, анализировать их с помощью математических методов, включая производные, что повысит качество принимаемых решений.

3. *Междисциплинарные связи*

Работа с производными привязывает математику к другим областям знания (физике, инженерии, экономике), что важно для системного подхода к профессии. Это соответствует профессиональным стандартам, которые требуют от специалистов междисциплинарного подхода и способности интегрировать знания из различных сфер.

Средства наглядности и ТСО:

- Экран – 1 шт.;
- Презентация по теме – 1 шт.;
- Ноутбук с программным обеспечением Microsoft Office и доступом в Интернет – 1 шт.

Формы организации деятельности обучающихся: фронтальная, индивидуальная и групповая.

Подходы к обучению, реализуемые на уроке:

- компетентностный;
- рефлексивный;
- деятельностный;
- психологический;
- личностно-ориентированный.

Педагогические технологии, используемые на уроке:

- проектная технология *(работа в группах в целях проведения исследовательской деятельности);*
- технология проблемного обучения *(обсуждение и решение проблемы в ходе урока);*

Дидактические принципы, реализуемые на уроке:

- принцип научности;
- принцип прочности усвоения знаний, умений;
- принцип наглядности;
- принцип коллективизма;
- принцип доверия и поддержки.

Методы обучения, реализуемые на уроке:

- Объяснительно-иллюстративный;
- Рефлексивные методы;
- Поисково-алгоритмический метод;
- Анализ и обобщение полученных результатов.

Приемы педагогической техники, используемые на уроке:

- Использование системы наводящих вопросов в случаях неправильных ответов.
- Опора на междисциплинарную интеграцию и субъектный опыт обучающихся.

Междисциплинарные связи:

ОУД.08 Информатика, ОУД.11 Физика.

Прогнозируемый результат:

1. *Критическое мышление:*
   Развитие умения анализировать ситуации и принимать обоснованные решения на основе полученных знаний о производных и их физических значениях.
2. *Работа в группе:*
   Умение работать в команде, обсуждая и обмениваясь идеями по применению производных, что способствует формированию социальных навыков.
3. *Использование технологий:*
   Навыки применения программного обеспечения для визуализации графиков и анализа производных, что облегчает изучение и практическое применение темы.
4. *Итоговая оценка:*
   Групповые проекты или презентации, где студенты представляют свои решения профессиональных задач с использованием производных.

ХОД УРОКА

I. Мотивация

Здравствуйте. Тема нашего урока «Физический смысл производной в профессиональных задачах ». Эпиграфом к нашему уроку будут слова Н.И.Лобачевского:

«…нет ни одной области в математике, которая когда-либо не окажется применимой к явлениям действительного мира…»

Проблемный вопрос:

«Дифференциальное исчисление – это описание окружающего нас мира, выполненного на математическом языке. Производная помогает нам успешно решать не только математические задачи, но и задачи практического характера в разных областях науки и техники»

Действительно ли это так?

И сегодня на уроке мы попытаемся показать, как с помощью производной можно решать задачи из различных отраслей науки и техники, исследовать реальные процессы, происходящие в нашей жизни.

II. Актуализация знаний

- Вначале давайте вспомним, что мы знаем о производной.

- Что называется производной функции?

(Производной функции в данной точке называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю)

- В чем заключается физический смысл производной?

(Скорость есть производная от пути по времени v(t) = S′(t))

- В чем заключается геометрический смысл производной?

(Угловой коэффициент касательной к графику функции равен производной этой функции, вычисленной в точке касания f′(x) = k = tgα)

Найти производную функций:

1) $y = 4x^4$

2) $y = \frac{x^2}{2}$

3) $y = \frac{2}{x}$

4) e^{5x}

6) $y = \frac{\sqrt{x}}{2}$

7) y=cos10x - sinx

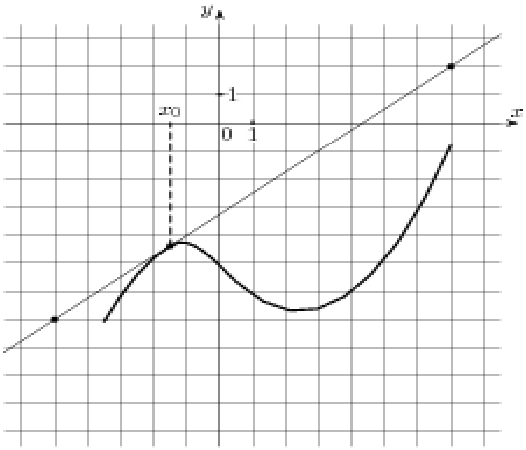
8) $y = 4 - x^4$

9) $y = x^3 - x^2$

10) $y = \frac{x^6}{2}$

5) y=sin4x

1. На рисунке изображён график функции f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции в точке x_0 .



0	,	7	5

III Презентация исследовательской работы обучающихся.
На одном из первых уроков изучения производной я вам задала вопрос:

Как вы думаете, зачем мы изучаем производную функции? Где она может применяться?

Учитывая, что существует физический смысл производной, предположили, что эта тема находит свое применение не только в математике, но и в других науках.

Итак, вы разделились на три группы для того, чтобы поработать с различными источниками информации и провести самостоятельное исследование по теме «Применение производной в различных областях науки». Каждая группа получила свое задание:

И сейчас мы увидим результаты вашей работы.

I группа - «Применение производной в физике»

II группа - «Применение производной в материаловедение»

III группа - «Применение производной в экономике»

I группа - «Применение производной в физике».
Рассмотрим применение производной в физике.
Мы знаем, что физический смысл производной заключается в том, что
скорость есть производная от пути по времени:
$v(t) = S'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$
Рассмотрим задачу.
Автомобиль приближается к мосту со скоростью 72 км/ч. У моста висит дорожный знак "36км/ч". За 7 сек до въезда на мост, водитель нажал на тормозную педаль. С разрешаемой

ли скоростью автомобиль въехал на мост, если тормозной путь определяется формулой $s=20t-t^2$?

Решение

Чтобы найти зависимость скорости от времени, найдем производную от пути по времени $v(t) = S'(t) = 20 - 2t$

В момент въезда на мост скорость равна $v(7) = = 20 - 2 \cdot 7 = 6$ (м/с), что соответствует 21,6 км/ч. Т.к. разрешаемая скорость 36км/ч, ответ: да, автомобиль въехал на мост с разрешаемой скоростью.

Рассмотрим применение производной в электротехнике

Количественной характеристикой электрического тока является сила тока.

В цепи электрического тока электрический заряд меняется с течением времени по закону $q=q(t)$. Если Δt – приращение времени, Δq – приращение заряда, то сила тока равна пределу отношения $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

Т.е. сила тока I есть производная заряда q по времени.

$$I = q'(t)$$

Рассмотрим задачу:

Заряд, протекающий через проводник, меняется по закону

$$q = Sin(2t - 10)$$

Найти силу тока в момент времени t=5 сек.

Решение

Т.к. сила тока - есть производная заряда по времени, $I = q'(t)$

Учитывая, что $(sin\,x)' = cos\,x$, $(2t - 10)' = 2$

применяя правило нахождения производной сложной функции, получаем:

$I = q'(t) = 2\cos(2t - 10)$

Подставляя вместо t значение 5, получаем:

Тогда $I(5) = 2\cos 0 = 2$(A)

Ответ: 2 А

Производная применяется и в других разделах физики.

- Мощность – это производная работы по времени $P = A'(t)$.
- Сила – есть производная работы по перемещению $F = A'(x)$.
- Теплоемкость – это производная количества теплоты по температуре $C = Q'(t)$.
- Давление – производная силы по площади $P = F'(S)$

Этот ряд можно дальше продолжать…Таким образом, мы видим, что производная применяется в физике очень обширно.

II группа - Применение производной в материаловедение

Химия – это наука о веществах, о химических превращениях веществ, она изучает закономерности протекания различных реакций.

В чем же заключается химический смысл производной?

Пусть дана функция $p = p(t)$,где p - количество некоторого вещества, вступившего в химическую реакцию в момент времени t . Приращению времени Δt будет соответствовать приращение Δp количества вещества. Отношение $\Delta p / \Delta t$ - есть средняя скорость химической реакции за промежуток времени Δt . Предел этого отношения при стремлении Δt к нулю - есть скорость химической реакции в данный момент времени.

$v(t) = p'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t}$

Таким образом, химический смысл производной состоит в том, что скорость реакции **v** – есть ***производная*** от количества вещества **p** по времени.

Рассмотрим задачу:

Пусть количество вещества, вступившего в химическую реакцию задается зависимостью $p(t) = \frac{t^2}{2} + \mathbf{3t - 3}$ (в молях). Найти скорость химической реакции через 3 секунды.

Т. к. скорость химической реакции выражают ***производной*** от количества вещества по времени, то скорость химической реакции меняется по закону:

v (t) = p′(t) = t + 3; Соответственно через 3 секунды скорость реакции будет равна v (3) = 3+3 = 6(моль\с).

Ответ: 6 моль\с.

Скорость химической реакции – один из решающих факторов, который нужно учитывать во многих областях научно-производственной деятельности. Например, инженерам-технологам при определении эффективности химических производств, химикам, разрабатывающим препараты для медицины и сельского хозяйства, а также врачам и агрономам, использующим эти препараты для лечения людей и для внесения их в почву. Одни реакции проходят практически мгновенно, другие идут очень медленно. В реальной жизни для решения производственных задач, в медицинской, сельскохозяйственной и химической промышленности важно знать скорости реакций химических веществ.

Биологический смысл производной. Пусть зависимость между числом особей популяции микроорганизмов x и временем t её размножения задана уравнением: x = x (t). Пусть Δ t - промежуток времени от некоторого начального значения t до t +Δ t . Тогда Δ x = x (t + Δt)- x (t) - изменение числа особей организмов. Отношение Δ x /Δ t является средней скоростью размножения или, как принято говорить, средней производительностью жизнедеятельности популяции. Предел этого отношения при Δ x→0 есть производительность жизнедеятельности популяции в момент времени t

$P(t) = x'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$

Т.е. производительность жизнедеятельности популяции в момент времени t есть производная от числа особей популяции по времени.

Мы видим, что производная нашла свое применение в химии и биологии.

III группа - «Применение производной в экономических задачах».

Давайте выясним, в чем же заключается экономический смысл производной.

Пусть известна функция $u = u(t)$, выражающая объём произведённой продукции *u* за время *t*. Тогда за время $\Delta t = t_1 - t_0$ величина произведённой продукции составит

$$\Delta u = u(t_1) - u(t_0) = u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)$$

Средняя производительность труда – это отношение количества произведённой продукции к затраченному времени, т.е. $z_{cp} = \frac{\Delta u}{\Delta t}$

Производительностью труда в момент времени t_0 называется предел, к которому стремится z_{cp} при $\Delta t \to 0$:

$$z(t) = u'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t}$$

Т.е. экономический смысл производной состоит в том, что производительность труда есть производная от объёма произведённой продукции по времени.

Задача: Объём продукции *u*, выпускаемой рабочим в течение рабочего дня, выражается функцией $u(t) = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50$, где *t* – время, ч; причём $1 \le t \le 8$. Вычислить максимальную производительность труда в течении рабочего дня.

Производительность труда $z(t)$ выражается формулой $z(t) = u'(t)$. Тогда, дифференцируя функцию u(t), получаем

$$z(t) = u'(t) = -2{,}5t^2 + 15t + 100$$

$$u' = 0$$

$$-2{,}5t^2 + 15 + 100 = 0$$

Критические точки $t_1 = -4$, не принадлежат $[6; 14]$

$t_2 = 10$ принадлежит $[6; 14]$

$$u(14) = -\frac{5}{6} * 14^3 + \frac{15}{2} * 14^2 + 100 * 14 + 50 = 633$$

$$u(6) = -\frac{5}{6} * 6^3 + \frac{15}{2} * 6^2 + 100 * 6 + 50 = 740$$

$$u(10) = -\frac{5}{6} * 10^3 + \frac{15}{2} * 10^2 + 100 * 10 + 50 = 966.$$

Ответ: Максимальная производительность в 10 часов дня, объём произведенной продукции равен 966 изделий

Преподаватель: Почему после 10-ти часов мы наблюдаем спад производительности труда? (Упадок сил, плохо проветрено помещение, возможно бригада рабочих использует ручной труд)
Таким образом производная применяется для решения экономических задач.

Преподаватель. Все три группы справились с заданием и подтвердили нашу гипотезу. Вы сами доказали, что понятие производной функции применяется не только в математике, оно используется всюду, где есть неравномерное протекание процесса: это и неравномерное физическое движение, и переменный ток, и химические реакции, и радиоактивный распад вещества и экономические процессы и многое другое, что может использоваться в профессиональных задачах вашего .

- Вы убедились, что дифференциальное исчисление – это описание окружающего нас мира, выполненное на математическом языке.

Тем самым в очередной раз подтвердили слова Н.И.Лобачевского:

«…нет ни одной области в математике, которая когда-либо не окажется применимой к явлениям действительного мира…»

IV. Рефлексия

Выберете фразу:

- Все смог понять.
- Не совсем все понял, хочу понять.
- Ничего не понял

И завершим наш урок стихотворением про производную

Только лишь иксу дадим приращение
И посчитаем предел отношения –
Сможем о функции мы без сомнения
Выяснить все, применяя умения!
О, производная, сколько в тебе
Кроется нужных, красивых понятий!
Свойства всех функций поможешь ты мне
Исследовать точно, что важно и кстати!
Про возрастание и убывание,
Про асимптоты и точки разрыва,
Про минимум, максимум также узнаем мы,
График построим точно! Не криво!
О, производная, роль не последнюю
В каждой науке ты точно играешь!
Связана с физикой и геометрией,
Много задач нам решить позволяешь!

Мы убедились в важности изучения темы "Производная", ее роли в исследовании процессов науки и техники, в возможности конструирования по реальным процессам математических моделей, и решения важных задач.
Спасибо за работу!

ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА ОТКРЫТОГО УРОКА

Тема урока: Физический смысл производной в профессиональных задачах

«…нет ни одной области в математике, которая когда-либо не окажется применимой к явлениям действительного мира…»

Н.И. Лобачевский.

Цель урока: формирование функциональной грамотности обучающихся на примерах применения производной функции для решения профессиональных задач в смежных науках.

Задачи урока: способствовать развитию логического мышления, внимания, математической интуиции, умению анализировать, систематизировать, интерпретировать полученные результаты; применять знания в нестандартных ситуациях; способствовать развитию и пониманию у обучающихся межпредметных связей алгебры, как науки;

Планируемые результаты:
предметные: знать определение производной функции, геометрический и физический смысл производной, уметь находить производные элементарных функций;
метапредметные: овладение навыками организации исследовательской деятельности, постановки целей, планирования, самоконтроля и оценки результатов своей деятельности, умениями предвидеть возможные результаты своих действий; формирование умения работать по алгоритму, использовать математические знания для решения практических задач в смежных науках;
личностные: развитие логического и критического мышления, культуры речи, способности к умственному эксперименту, самостоятельности в приобретении новых знаний и практических умений, развитие интереса к предмету и математических способностей, формирование умения работать в группе.

Средства методического обеспечения урока: компьютер, мультимедийный проектор, презентация

Тип урока: урок применения и совершенствования знаний.

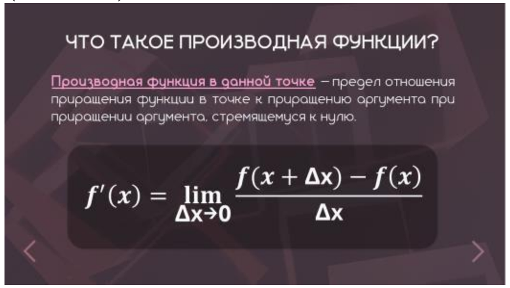
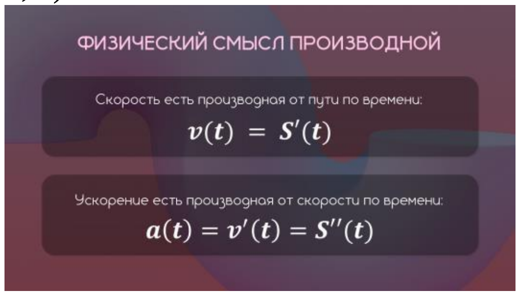
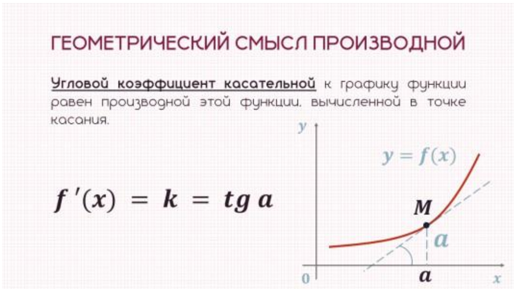
Формы работы обучающихся*:* фронтальная, индивидуальная, групповая.

Средства методического обеспечения урока*:* компьютер, мультимедийный проектор, презентация.

Используемые технологии: информационно-коммуникационная, исследовательская, проблемного обучения.

Этапы урока	Задачи этапа	Деятельность преподавателя	Деятельность ученика
1. Организационный момент. Самоопределение к учебной деятельности (2 мин) Слайд 3-4	Создание благоприятного психологического настроя на работу.	Приветствие, мобилизация внимания обучающихся. Постановка проблемы, определение темы, цели занятия. Здравствуйте. Тема нашего урока «Физический смысл производной в профессиональных задачах ». Эпиграфом к нашему уроку будут слова Н.И. Лобачевского: «…нет ни одной области в математике, которая когда-либо не окажется применимой к явлениям действительного мира…» (слайд 3).  «Дифференциальное исчисление – это описание окружающего нас мира, выполненного на математическом языке. Производная помогает нам успешно решать не только математические задачи, но и задачи практического характера в разных областях науки и техники». Действительно ли это так? (слайд 4).	Включаются в деловой ритм урока, определяют тему и цель занятия

		 И сегодня на уроке мы попытаемся показать, как с помощью производной можно решать задачи из различных отраслей науки и техники, исследовать реальные процессы, происходящие в нашей жизни.	

2. Актуализация (10 мин) Слайд 5-10	Актуализация опорных знаний.	Краткое изложение теоретических сведений о производной: 1) Что называется производной функции? (слайд 5)  2) В чём заключается физический и геометрический смысл производной? (слайд 6, 7)   Преподаватель анализирует и корректирует ответы	Отвечают на вопросы: 1) Производной функции в данной точке называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю. 2) Скорость есть производная от пути по времени $v(t) = S'(t)$. Угловой коэффициент касательной к графику функции равен производной этой функции, вычисленной в точке касания $f'(x) = k = tg\alpha$. Решают задачи. Выполняют задания. Записывают

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>
обучающихся.

3) Найдём производную функций (слайд 8):

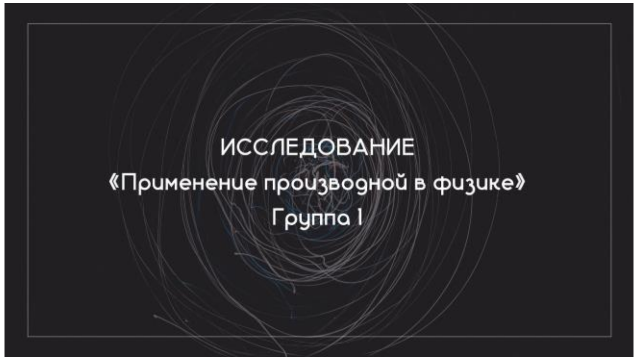
4) На рисунке изображён график функции f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x0. Найдите значение производной функции в точке x0 (слайд 10).

</td>
<td>
решение на доске. Проводят самопроверку.

3) Вычисление производной функции у доски поочередно.
Ответы (слайд 9):

4) Нахождение значения производной по графику.
Ответ: 0,75.
</td>
</tr>
</table>

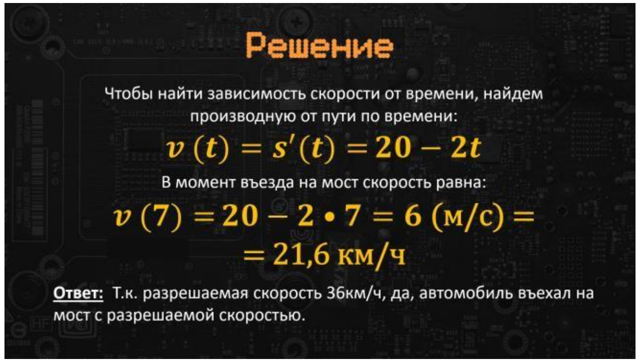
<table>
<tr>
<td>3. Этап исследовательских работ (25-30 мин)
Слайд (11-27)</td>
<td>Анализ самостоятельных исследовательских работ учеников по теме. Просмотр и оценка подготовленных презентаций.</td>
<td>На одном из первых уроков изучения производной я вам задала вопрос:
Как вы думаете, зачем мы изучаем производную функции? Где она может применяться?
Учитывая, что существует физический смысл производной, предположили, что эта тема находит свое применение не только в математике, но и в других науках.
Итак, вы разделились на три группы для того, чтобы поработать с различными источниками информации и провести самостоятельное исследование по теме «Применение производной в различных областях науки». Каждая группа получила свое задание:
И сейчас мы увидим результаты вашей работы.

I группа - «Применение производной в физике» (слайд 11).

</td>
<td>Представление учениками своих исследовательских работ, ответы на вопросы, самопрезентация, объяснение решения задач.

I группа - «Применение производной в физике» (слайд 1-17).

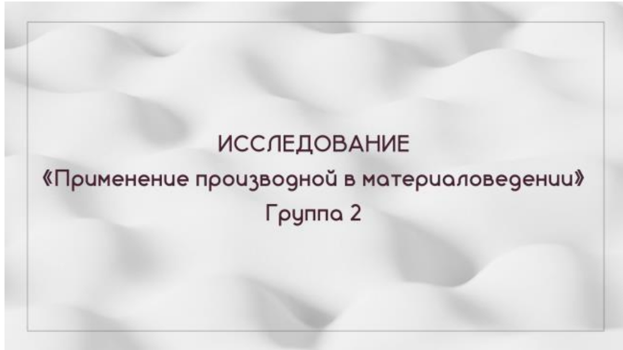


</td>
</tr>
</table>

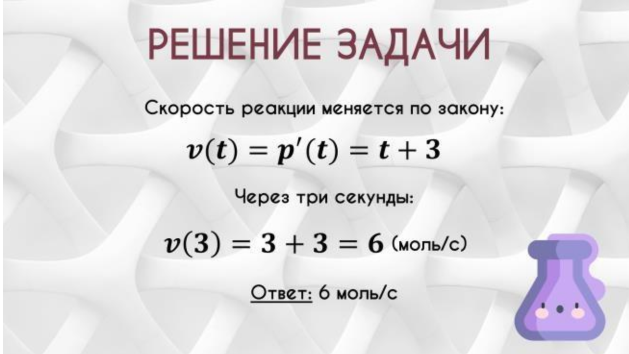
			 II группа – «Применение производной в химии и биологии» (слайд 19-22).

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>

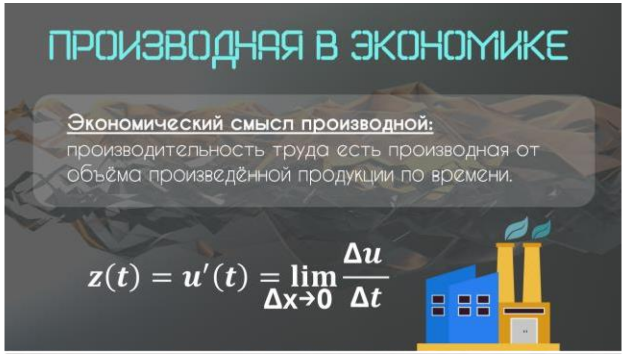
II группа – «Применение производной в химии и биологии» (слайд 18).

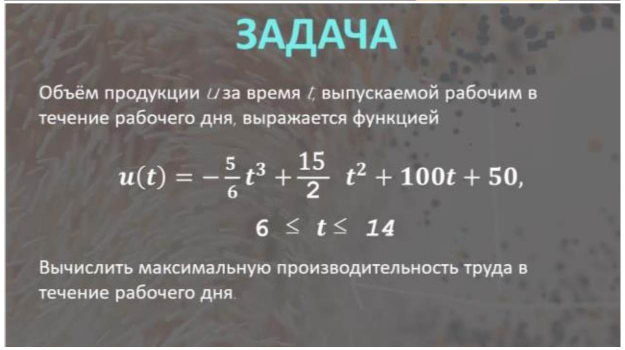


</td>
<td>

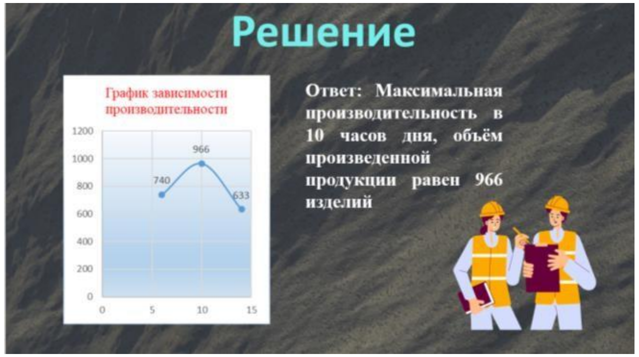


III группа - «Применение производной в экономических задачах» (слайд 24-27).





</td>
</tr>
</table>

		III группа - «Применение производной в экономических задачах» (слайд 23).	 

			
4. Рефлексия (3 мин).	Дать качественную оценку работы группы и отдельных обучающихся. Инициировать рефлексию обучающихся по поводу мотивации их собственной деятельности и взаимодействия с преподавателем и другими детьми	Выберете фразу: - Все смог понять. - Не совсем все понял, хочу понять.	Проводят характеристику урока, обсуждают качество работы класса и отдельных обучающихся.

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>
- Ничего не понял.

Мы убедились в важности изучения темы "Производная", ее роли в исследовании процессов науки и техники, в возможности конструирования по реальным процессам математических моделей, и решения важных задач (слайд 28).

На следующих уроках мы продолжим изучение этой темы, научимся исследовать функции с помощью производной и решать более сложные задачи, в том числе практического содержания. Спасибо за работу!
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Приложение 1

Дидактический материал по теме «Производная и её приложения»

Задание № 1. Соотнесите функцию с ее производной (таблица 1).

Таблица 1

1. $y = a^x$	а) $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
2. $y = \ln x$	б) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
3. $y = \log_a x$	в) $y' = -\sin x$
4. $y = \sqrt{x}$	г) $y' = \frac{1}{x \ln a}$
5. $y = \sin x$	д) $y' = a^x \cdot \ln a$
6. $y = \cos x$	е) $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
7. $y = \operatorname{tg} x$	ж) $y' = \frac{1}{x}$
8. $y = \operatorname{ctg} x$	з) $y' = \cos x$

Ответ: 1 – д, 2 – ж, 3 – г, 4 – б, 5 – з, 6 – в, 7 – а, 8 – е.

Задание № 2. Вставьте в предложения пропущенные слова:

1. Если производная в точке меняет знак с «+» на «-», то эта точка называется точкой _____________функции.

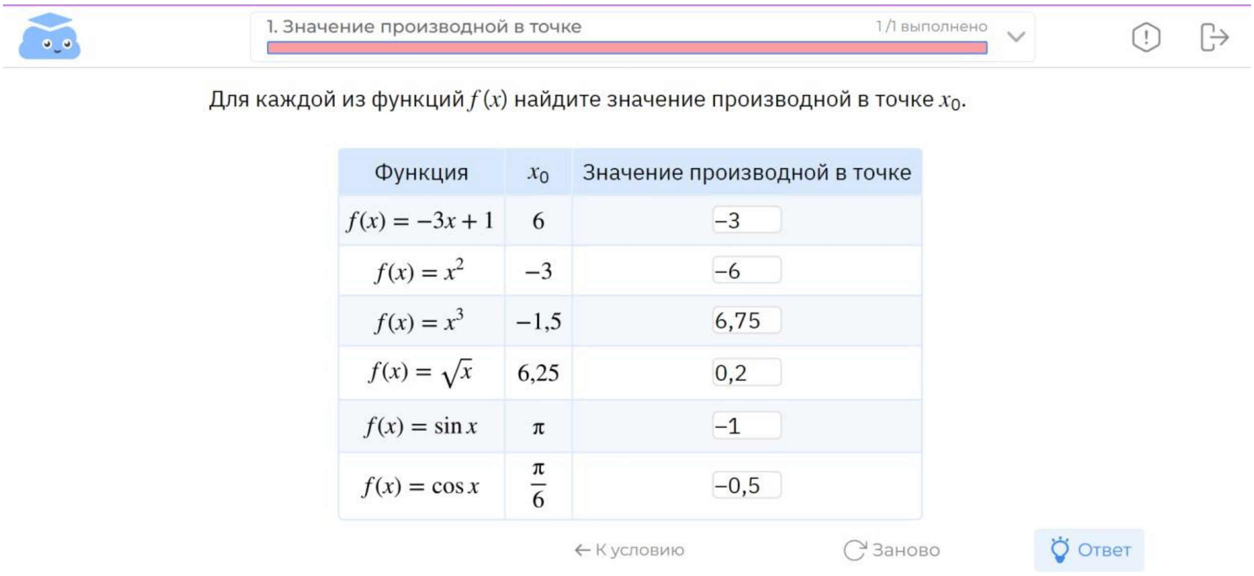
2. Если производная в точке меняет знак с «-» на «+», то эта точка называется точкой _______________функции.

3. Если производная функции положительна на заданном интервале, то функция ______________на этом интервале.

4. Если производная функции отрицательна на заданном интервале, то функция _____________на этом интервале.

Ответ: 1 – максимума, 2 – минимума, 3 – возрастает, 4 – убывает.

Задание №3. Цифровой электронный ресурс «Облако знаний»



1. Значение производной в точке 1/1 выполнено

Для каждой из функций $f(x)$ найдите значение производной в точке x_0.

Функция	x_0	Значение производной в точке
$f(x) = -3x + 1$	6	–3
$f(x) = x^2$	-3	–6
$f(x) = x^3$	$-1{,}5$	6,75
$f(x) = \sqrt{x}$	6,25	0,2
$f(x) = \sin x$	π	–1
$f(x) = \cos x$	$\frac{\pi}{6}$	–0,5

Рисунок 1. Найти значение производной

Задание №4. Решите кроссворд:

1. Если существует … отношения приращения функции к приращению функции при стремлении приращения аргумента к нулю, то говорят, то функция дифференцируема.

2. Как называется точка, в которой производная равна 0 или не существует?

3. Величина, определяемая как производная скорости по времени.

4. Как называется операция отыскания производной?

5. … смысл производной выражает скорость изменения процесса в момент времени t.

6. Положительная вторая производная характеризует … функции.

7. Ученый, пришедший к понятию производной, исходя из вопросов механики.

8. При помощи какого предмета итальянский математик Тарталья изучал угол наклона касательной?

9. Немецкий математик, один из основателей дифференциального исчисления.

10. «Прямая наиболее тесно примыкающая к кривой в малой окрестности заданной точки». О чем писал Ферма?

11. Производная координаты по …, есть скорость (в именительном падеже).

Ответы на рисунке 2.

									1	п	р	е	д	е	л				
								2	к	р	и	т	и	ч	е	с	к	а	я
						3	у	с	к	о	р	е	н	и	е				
4	д	и	ф	ф	е	р	е	н	ц	и	р	о	в	а	н	и	е		
							5	ф	и	з	и	ч	е	с	к	и	й		
									6	в	о	г	н	у	т	о	с	т	ь
					7	н	ь	ю	т	о	н								
						8	о	р	у	д	и	е							
					9	л	е	й	б	н	и	ц							
						10	к	а	с	а	т	е	л	ь	н	а	я		
					11	в	р	е	м	я									

Рисунок 2. Кроссворд

Задача № 5. Доказать тождество $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$**.**

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \arcsin x + \arccos x$. Она определена на отрезке [-1;1]. Найдём производную этой функции:

$$f'(x) = (\arcsin x)' + (\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right) = 0$$

Так как производная равна нулю для всех возможных значений аргумента, кроме концов рассматриваемого отрезка, следовательно, функция $f(x)$ является постоянной на этом отрезке. Найдём значение этой функции при $x = 0$

$$f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Значит, $f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2}$. Тождество доказано.

Задача № 2. К графику функции $y = \sqrt{2 - \sin x}$ проведена касательная в точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{2}$. Найдите угловой коэффициент касательной.

Решение. Воспользуемся геометрическим смыслом производной для нахождения углового коэффициента касательной, так как угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в этой точке, равен производной от этой функции в данной точке. Тогда

$$y' = \left(\sqrt{2 - \sin x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{2 - \sin x}} \cdot (2 - \sin x)' = \frac{-\cos x}{2\sqrt{2 - \sin x}}$$

$$k = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{2\sqrt{2 - \sin\frac{\pi}{2}}} = 0$$

Ответ: 0.

Задача № 6. Найдите экстремумы функции $y = x^2 \cdot e^{-x}$**.**

Решение.

Областью определения функции является множество всех действительных чисел: $D(y) = R$.

Найдём производную функции и ее критические точки:

$$y' = 2x \cdot e^{-x} - x^2 \cdot e^{-x} = xe^{-x}(2 - x).$$

Производная равна нулю, если $x = 0$ или $x = 2$. Точек, в которых производная не существует, нет.

Определяем знак производной на каждом из интервалов, на которые критическими точками разбита область определения функции (рисунок 7):

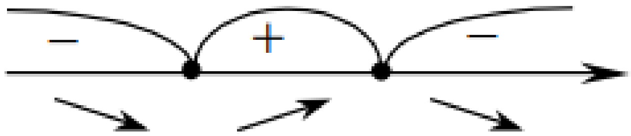


Рисунок 3

$x = 0$ – точка минимума функции $y = x^2e^{-x}$, так при переходе через эту точку производная меняет знак с «–» на «+».

$x = 2$ – точка максимума функции $y = x^2e^{-x}$, так при переходе через эту точку производная меняет знак с «+» на «–».

$y_{min} = y(0) = 0$,

$y_{max} = y(2) \approx 0{,}54$.

Ответ: $y_{min} = y(0) = 0$, $y_{max} = y(2) \approx 0{,}54$.

Задача № 7. Решите уравнение

$$4\cos 3x + 5\sin\frac{x}{2} + 15x = 4 - x^3.$$

Решение. Рассмотрим функцию, стоящую в левой части заданного уравнения: $y = 4\cos 3x + 5\sin\frac{x}{2} + 15x$. Найдём её производную

$$y' = \left(4\cos 3x + 5\sin\frac{x}{2} + 15x\right)' = -12\sin 3x + \frac{5}{2}\cos\frac{x}{2} + 15$$

Производная положительна при всех действительных значениях аргумента, следовательно, функция возрастает на всей числовой прямой.

Рассмотрим функцию, стоящую в правой части заданного уравнения: $y = 4 - x^3$. Найдём её производную

$$y' = (4 - x^3)' = -3x^2$$

Производная неположительна при всех действительных значениях аргумента, следовательно, функция убывает на всей числовой прямой.

На основании утверждения «о встречной монотонности» можно сделать вывод, что уравнение имеет единственный корень. Подстановкой убеждаемся, что этим корнем является $x = 0$.

Ответ: $x = 0$.

Задача № 8. Найдите скорость и ускорение материальной точки в момент времени $t = 2$**, если материальная точка движется прямолинейно по следующему закону** $S(t) = t^3 + 7t$**.**

Решение. Вычисляем первую производную пути по времени для нахождения скорости:

$$V(t) = S'(t) = (t^3 + 7t)' = 3t^2 + 7.$$

Найдем скорость в момент времени $t = 2$.

$$V(2) = 3 \cdot 2^2 + 7 = 19.$$

Вычисляем вторую производную пути по времени для нахождения ускорения:

$$a = S''(t) = (3t^2 + 7)' = 6t$$

Найдем ускорение в момент времени $t = 2$

$a(3) = 6 \cdot 2 = 12.$

Ответ: $V = 19$, $a = 12$.

Задача № 9. Маховик поворачивается за ▯ секунд на угол, вычисляемый по формуле: $\boldsymbol{\alpha}(t) = 27t - 0,8t^2$ **рад. Найдите угловую скорость вращения маховика в момент t=10 секунд, и в какой момент времени маховик остановится.**

Решение. Сначала найдем угловую скорость вращения маховика, для этого вычислим производную $\alpha'(t)$ и подставим в нее t = 10:

$$\omega(t) = a'(t) = (27t - 0,8t^2)' = 27 - 1,6t$$

$$\omega(10) = 27 - 1,6 \cdot 10 = 27 - 16 = 11 \text{ рад/с}.$$

Далее необходимо найти время, когда маховик остановится, для этого должно выполняться условие $\omega(t) = 0$, то есть нужно решить уравнение

$$27 - 1,6t = 0.$$

$$t = \frac{27}{1,6} = 16 \cdot \frac{7}{8} = 16,875 \text{ с}$$

Ответ: угловая скорость равна 11 рад/с, маховик остановится в момент времени $t = 16,875$ секундам

Задача №10. Найдите силу, действующую на материальную точку в момент времени $t = 3$ секунды, если она движется прямолинейно по закону $S(t) = t^3 + 5t^2 - 11$ и ее масса равна 2 кг.

Решение. Уравнение силы имеет вид:

$F = m \cdot a$,

где m – масса, а – ускорение.

Для того чтобы найти ускорение необходимо вычислить вторую производную от пути:

$$a(t) = S''(t) = (3t^2 + 10t)' = 6t + 10$$

Подставим в данное выражение $t = 3$:

$$a(3) = 6 \cdot 3 + 10 = 28$$

Подставим найденные значения в формулу для нахождения силы:

$$F = 2 \cdot 28 = 56.$$

Ответ: 56.

Задача № 11. Найдите скорость изменения силы тока в момент времени $t = 7$, если изменение силы тока задано уравнением: $I = 5t^2 + 6$.

Решение. Найдем производную:

$$I' = (5t^2 + 6)' = 10t.$$

Подставим $t = 7$ в полученное выражение:

$V = I'(7) = 10 \cdot 7 = 70.$

Ответ: 70.

Тема 4. Производная в прикладных задачах.

Задача № 12. Лыжная база расположена в 9 км от ближайшей точки дороги. Мише необходимо добраться от базы до города, расположенного от упомянутой точки в 15 км. Скорость Миши по заснеженной тропе 8 км/ч, а по дороге 10 км/ч. К какой точке дороги ему надо идти, чтобы в кратчайшее время добраться до города, если считать, что дорога до города прямая?

Решение. Выполним схематический рисунок условия (рисунок 8)

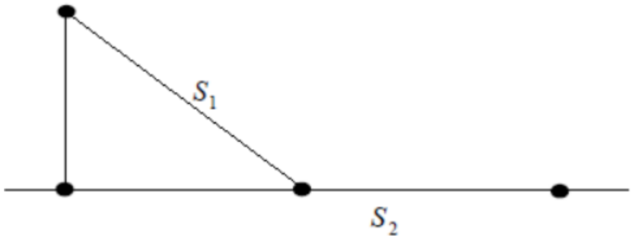


Рисунок 4. Рисунок условия задачи

Введем условные обозначения: B – лыжная база, C – город, l – дорога, V_1 – скорость по заснеженной тропе, V_2 – скорость по дороге. Обозначим постоянные и переменные величины: постоянные – BA, AC, V_1, V_2; переменные – AD, DC, BD.

Пусть x – расстояние AD, где $0 \leq x \leq 15$. По теореме Пифагора можем найти BD.

$$S_1 = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{81 + x^2}$$

Тогда

$$S_2 = DC = 15 - x$$

Вспомним из курса физики формулу нахождения расстояния:

$$S = V \cdot t$$

Выразим время:

$$t = \frac{S}{V}$$

Значит, Миша проходит по полю путь

$$S_1 \text{за } t_1 = \frac{\sqrt{81 + x^2}}{8}$$

а по дороге путь S_2 за

$$t_2 = \frac{15 - x}{10}$$

Тогда время, затраченное на путь S_1 и S_2, равно:

$$t(x) = \frac{\sqrt{81 + x^2}}{8} + \frac{15 - x}{10}$$

Так как в задаче надо найти точку дороги, чтобы в кратчайшее время добраться до города, то задача сводится к нахождению наименьшего значения функции на отрезке [0, 15].

$$\mathrm{t}'(\mathrm{x}) = \frac{(\sqrt{81 + \mathrm{x}^2}) \cdot 8 - 8'(\sqrt{81 + \mathrm{x}^2})}{8^2} \cdot (81 + \mathrm{x}^2) + \frac{(15 - \mathrm{x})' \cdot 10 - 10' \cdot (15 - \mathrm{x})}{10^2}$$

$$= \frac{8 \cdot 2\mathrm{x}}{64 \cdot 2\sqrt{81 + \mathrm{x}^2}} + \frac{-10}{100} = \frac{\mathrm{x}}{8\sqrt{81 + \mathrm{x}^2}} - \frac{1}{10}$$

Найдем критические точки, то есть те, где производная равна нулю.

$$\mathrm{t}'(\mathrm{x}) = 0$$

$$\frac{\mathrm{x}}{8\sqrt{81 + \mathrm{x}^2}} - \frac{1}{10} = 0$$

$$5\mathrm{x} - 4\sqrt{81 + \mathrm{x}^2} = 0$$

$$5\mathrm{x} = 4\sqrt{81 + \mathrm{x}^2}$$

$$25\mathrm{x}^2 = 16(81 + \mathrm{x}^2)$$

$$9\mathrm{x}^2 = 1296$$

$$x^2 = 144$$

$$x_1 = 12$$

$x_2 = -12$ не удовлетворяет условию задачи, так как $x_2 \varnothing [0; 15]$

Найдем значение функции в точках $x = 0, x = 12$ и $x = 15$

$$t(0) = \frac{\sqrt{0^2 + 81}}{8} + \frac{15 - 0}{10} \approx 2{,}625$$

$$t(12) = \frac{\sqrt{12^2 + 81}}{8} + \frac{15 - 12}{10} \approx 2{,}175$$

$$t(15) = \frac{\sqrt{15^2 + 81}}{8} + \frac{15 - 15}{10} \approx 2{,}187$$

Функция достигает наименьшего значения в точке $x = 12$.

$$15 - 12 = 3.$$

Ответ: Мише надо идти в точку, удаленную на 3 км от лыжной базы и на 12 км от дороги, чтобы в кратчайшее время добраться до города.

Задача № 13. Дан бак без крышки в виде прямоугольного параллелепипеда, в основании которого лежит квадрат и объем равен 108 см^3. При каких размерах бака на его изготовление пойдет наименьшее количество материала?

Решение:

Обозначим сторону основания через x см, тогда высота параллелепипеда будет $\frac{108}{x^2}$. Пусть S(x) площадь поверхности, тогда $S(x) = x^2 + 4 * \frac{108}{x^2} * x = x^2 + \frac{432}{x}$;

$S'(x) = 2x - \frac{432}{x^2}$; $S'(x) = 0$;

$2x - \frac{432}{x^2} = 0$;

$2x^3 = 432$; $x^3 = 216$; $x = 6$;

По условию задачи $x \in (0;\infty)$

Найдем знак производной на промежутке (0;6) и на промежутке (6; ?). Производная меняет знак с “-” на “+”. Отсюда x=6 точка минимума, следовательно, S(6)=108 см^2 наименьшее значение. Значит, сторона основания равна 6 см, высота 12см.

Задача № 14. Из проволоки длиной 20см надо сделать прямоугольник наибольшей площади. Найти его размеры.

Решение:

Обозначим одну сторону прямоугольника через x см, тогда вторая будет (10-x) см, площадь $S(x) = (10-x) * x = 10x - x^2$;

$S/(x) = 10 - 2x$; $S/(x) = 0$; $x = 5$;

По условию задачи x (0;10)

Найдем знак производной на промежутке (0;5) и на промежутке (5;10). Производная меняет знак с “+” на “-”. Отсюда: x=5 точка максимума, S(5)=25см^2 – наибольшее значение. Следовательно, одна сторона прямоугольника 5см, вторая 10-x=10-5=5см;

Задача №15. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 4t^2 - 15t + 10$**, где** x **– расстояние в метрах, t – время в секундах. Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени** $t = 3$ **секунды.**

Решение. Найдем зависимость скорости от времени, для этого вычислим производную от функции, задающей путь: $v(t) = x'(t) = 8t - 15$. Для того чтобы найти скорость в момент времени t, необходимо подставить значение $t = 3$ в формулу $v(t)$. Получим $v(3) = 8 \cdot 3 - 15 = 9$

Ответ: 9 м/с.

Задача № 16. На рисунке 9 изображен график производной функции f(x)**, определенной на интервале** (– 6; 6)**. Найдите промежутки возрастания функции** f(x)**. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.**

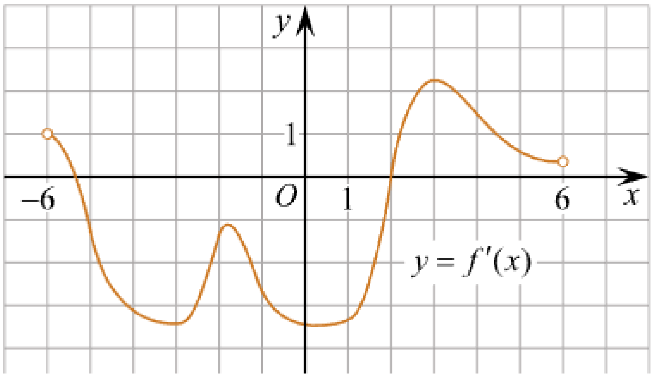


Рисунок 5. График производной функции f(x)

Решение. Промежутки возрастания данной функции f(x) соответствуют промежуткам, на которых ее производная неотрицательна, то есть промежуткам (– 6; – 5,2] и [2; 6). Данные промежутки содержат целые точки 2, 3, 4 и 5. Их сумма равна 14.

Ответ: 14.

Задача № 17. На рисунке изображён график y=f$'$(x) — производной функции y=f(x) определенной на интервале (−8; 3). В какой точке отрезка [−3; 2] функция y=f(x) принимает наибольшее значение?

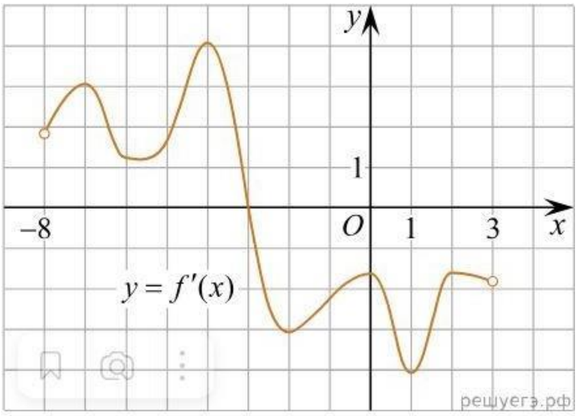


Рисунок 6. График y=f$^{/}$(x)

Решение. Функция, дифференцируемая на отрезке [a; b], непрерывна на нем. Если функция непрерывна на отрезке [a; b], а её производная положительна (отрицательна) на интервале (a; b), то функция возрастает (убывает) на отрезке [a; b].

На заданном отрезке производная функции y=f(x) неположительна, функция на этом отрезке убывает. Следовательно, наибольшее значение функции достигается на левой границе отрезка, т. е. в точке −3.

Ответ: −3.

Задание № 18. Цифровой электронный ресурс «Облако знаний» (Рисунок 11)

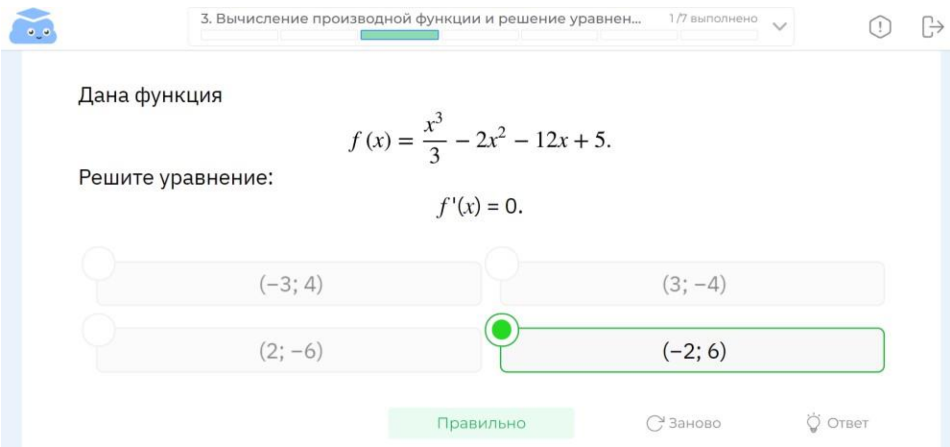


Рисунок 7. Задание на решение уравнений

Задание №19. Викторина по теме «Производная» (Рисунок 12).

(https://wordwall.net/ru/resource/32796476/математика/производная)

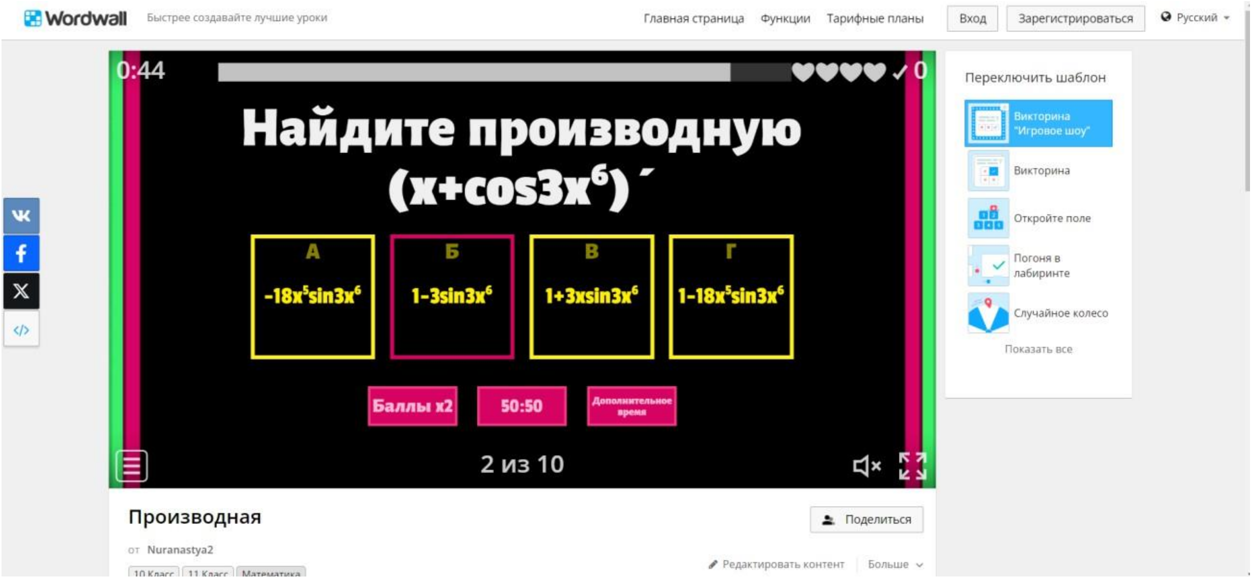


Рисунок 8. Задание на нахождение производной

Задание № 20. Интерактивные задания (Рисунок 13).

(https://wordwall.net/ru/resource/32796476/математика/производная)

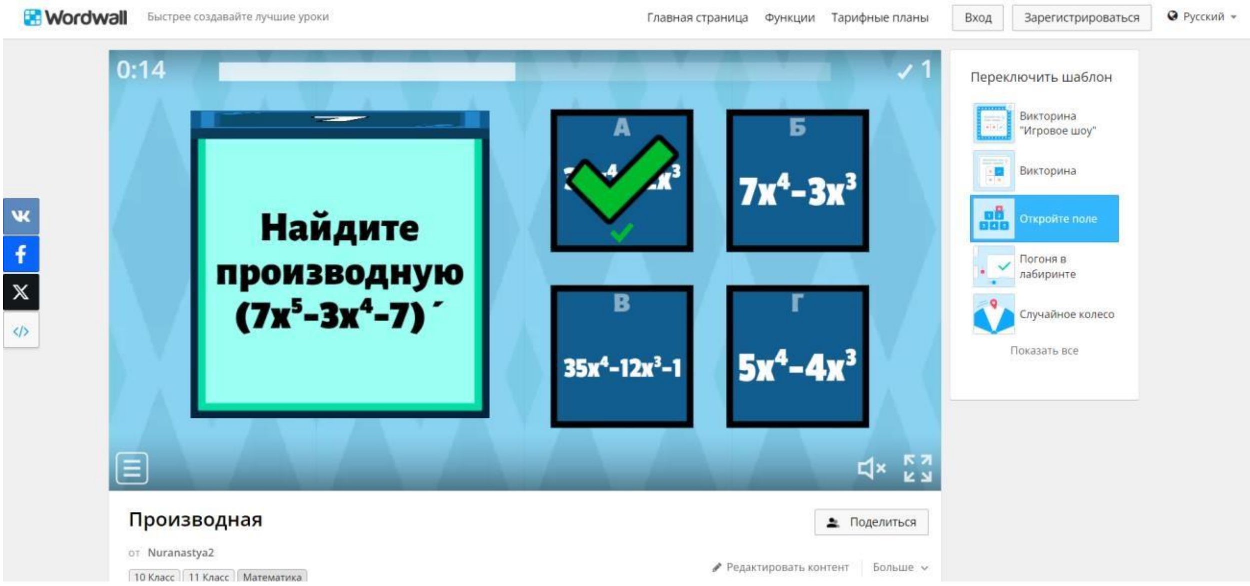


Рисунок 9. Интерактивные задания на скорость по теме «Производная»